Facebook @Wiskunne
www.wiskunne.be
admin@wiskunne.be

Toets splitsen in partieelbreuken:

1. $\int \frac{1}{(x+1).x} dx$

We willen de breuk opsplitsen in $\frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{x}$ omdat we weten dat de integraal van $\frac{1}{x} = ln|x| + C$. Het eerste wat we moeten doen is A en B bepalen. We maken van de twee breuken terug één breuk:

$$\frac{A.x + B(x+1)}{(x+1).x} = \frac{Ax + Bx + B}{(x+1).x} = \frac{1 + 0x}{(x+1).x}$$

We hebben nu twee vergelijkingen:

$$\begin{cases} Ax + Bx = 0x \\ B = 1 \end{cases}$$

$\begin{cases} A + B = 0 \\ B = 1 \end{cases}$ we schrappen de x

$\begin{cases} A + 1 = 0 \\ B = 1 \end{cases}$ We vullen B=1 in

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Dus de integraal wordt:

$$\int \frac{-1}{(x+1)} dx + \int \frac{1}{x} dx$$

$$-1 \int \frac{1}{(x+1)} dx + ln|x| + C$$

Constanten mag je voorop plaasten en de standaardintegraal uitgewerkt

Nu passen we substitutie toe (we willen naar $\frac{1}{u}$) :

$$u = x + 1$$

$$du = dx$$

$$-1 \int \frac{1}{u} du + ln|x| + C$$

$-ln|u| + ln|x| + C$

$-ln|x+1| + ln|x| + C$

2. $\int \frac{3}{(x-2)^2.(x+3)} dx$

Dit is een speciaal geval want $\frac{1}{(x-2)^2}$ wordt opgesplitst in $\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2}$. Dus we krijgen:

$$\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x+3)}$$

We maken er terug één breuk van:

$$\frac{A.(x-2).(x+3) + B.(x+3) + C.(x-2)^2}{(x-2)^2.(x+3)}$$

$$\frac{Ax^2 + Ax - 6A + Bx + 3B + Cx^2 - 4Cx + 4C}{(x-2)^2.(x+3)} = \frac{3}{(x-2)^2.(x+3)}$$

$$\begin{cases} Ax^2 + Cx^2 = 0x^2 \\ Ax + Bx - 4Cx = 0x \\ -6A + 3B + 4C = 3 \end{cases}$$

Dit lossen we op via het rekenmachien, je kan ook twee keer substitutie toepassen.

$$\begin{cases} A = -0{,}12 \\ B = 0{,}6 \\ C = 0{,}12 \end{cases}$$

$$\int \frac{0{,}12}{(x+3)} dx + \int \frac{0{,}6}{(x-2)^2} dx + \int \frac{-0{,}12}{(x-2)} dx$$

$$0{,}12 \int \frac{1}{(x+3)} dx + 0{,}6 \int \frac{1}{(x-2)^2} dx - 0{,}12 \int \frac{1}{(x-2)} dx$$

Constanten mag je voorop plaasten

Nu passen we substitutie toe (we willen naar $\frac{1}{u}$) :

$u = x + 3 \qquad z = x - 2 \qquad v = x - 2$

$du = dx \qquad dz = dx \qquad dv = dx$

We nemen drie verschillende letters voor de duidelijkheid, je mag ook drie keer u nemen.

$$0{,}12 \int \frac{1}{u} du + 0{,}6 \int \frac{1}{(z)^2} dz - 0{,}12 \int \frac{1}{v} dv$$

$$0{,}12 \ln|u| - 0{,}6 \frac{1}{z} - 0{,}12 \ln|v| + C$$

Twee standaardintegralen, één is z^{-2}. Dit lossen we op door de exponent(=-2) eentje te verhogen. Wanneer we z^{-1}afleiden krijgen we $-z^{-2}$. Dus we zetter er een min voor.

$$0{,}12 \ln|x + 3| - 0{,}6 \frac{1}{x - 2} - 0{,}12 \ln|x - 2| + C$$

3. $\int \frac{36}{(x-5).(x+1)^2} dx$

Dit is een speciaal geval want $\frac{1}{(x+1)^2}$ wordt opgesplitst in $\frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2}$. Dus we krijgen:

$$\frac{A}{(x + 1)} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x - 5)}$$

We maken er terug één breuk van:

$$\frac{A.(x + 1).(x - 5) + B.(x - 5) + C.(x + 1)^2}{(x + 1)^2.(x - 5)}$$

$$\frac{Ax^2 - 4Ax - 5A + Bx - 5B + Cx^2 + 2Cx + C}{(x + 1)^2.(x - 5)} = \frac{36}{(x - 5).(x + 1)^2}$$

$$\begin{cases} Ax^2 + Cx^2 = 0x^2 \\ -4Ax + Bx + 2Cx = 0x \\ -5A - 5B + C = 36 \end{cases}$$

Dit lossen we op via het rekenmachien, je kan ook twee keer substitutie toepassen.

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = -6 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{-1}{(x+1)}dx + \int \frac{-6}{(x+1)^2}dx + \int \frac{1}{(x-5)}dx$$

$$-1\int \frac{1}{(x+1)}dx - 6\int \frac{1}{(x+1)^2}dx + \int \frac{1}{(x-5)}dx$$

Constanten mag je voorop plaasten

Nu passen we substitutie toe (we willen naar $\frac{1}{u}$) :

$u = x + 1$ $\quad$ $z = x + 1$ $\quad$ $v = x - 5$

$du = dx$ $\quad$ $dz = dx$ $\quad$ $dv = dx$

We nemen drie verschillende letters voor de duidelijkheid, je mag ook drie keer u nemen.

$$-1\int \frac{1}{u}du - 6\int \frac{1}{(z)^2}dz + 1\int \frac{1}{v}dv$$

$$-\ln|u| + 6\frac{1}{z} + \ln|v| + C$$

Twee standaardintegralen, één is z^{-2}. Dit lossen we op door de exponent(=-2) eentje te verhogen. Wanneer we z^{-1}afleiden krijgen we $-z^{-2}$. Dus we zetter er een min voor.

$$-\ln|x+1| + 6\frac{1}{x+1} + \ln|x-5| + C$$

4. $\int \frac{7}{(x+1).(x-6)}dx$

We splitsen dit op, we krijgen:

$$\frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-6)}$$

We maken er terug één breuk van:

$$\frac{A.(x-6)+B.(x+1)}{(x+1).(x-6)}$$

$$\frac{Ax-6A+Bx+B}{(x+1).(x-6)}=\frac{7}{(x+1).(x-6)}$$

$$\begin{cases} Ax+Bx=0x \\ -6A+B=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B=7+6A \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+6A+7=0 \\ B=7+6A \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{(x-6)}dx+\int \frac{-1}{(x+1)}dx$$

$u=x-6$ $\qquad$ $z=x+1$

$du=dx$ $\qquad$ $dz=dx$

$$\int \frac{1}{u}du-\int \frac{1}{z}dz$$

$$ln|u|-ln|z|+C$$

$$ln|x-6|-ln|x+1|+C$$

5. $\displaystyle \int \frac{\mathbf{2}}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{2}).(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{x})}\,\boldsymbol{dx}$

We kunnen dit ook zo schrijven:

$$\frac{2}{(x-2).x(x-1)}$$

We splitsen dit op, we krijgen:

$$\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{x}+\frac{C}{(x-1)}$$

$$\frac{A.x.(x-1)+B.(x-2).(x-1)+C.x.(x-2)}{(x-2).x.(x-1)}$$

$$\frac{Ax^2-Ax+Bx^2-3Bx+2B+Cx^2-2Cx}{(x-2).x.(x-1)}=\frac{2}{(x-2).(x^2-x)}$$

$$\begin{cases} Ax^2+Bx^2+Cx^2=0x^2 \\ -Ax-3Bx-2Cx=0x \\ 2B=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+1+C=0 \\ -A-3-2C=0 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-1-C \\ 1+C-3-2C=0 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-1-C \\ -2=C \\ B=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=1 \\ -2=C \\ B=1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{(x-2)}dx+\int \frac{1}{x}dx+\int \frac{-2}{(x-1)}dx$$

$u=x-2$ $\qquad$ $v=x-1$

$du=dx$ $\qquad$ $dv=dx$

$$\int \frac{1}{u} du + \int \frac{1}{x} dx - 2 \int \frac{1}{v} dv$$

Constanten mogen voorop geplaatst worden

$\ln|u| + \ln|x| - 2\ln|v| + C$

$\ln|x-2| + \ln|x| - 2\ln|x-1| + C$

6. $\int \frac{1}{x^2+5x+6} dx$

Eerst moeten we de nulpunten bepalen van $x^2 + 5x + 6$. Dit kan je doen via horner, discriminant of som en product. De nulpunten zijn $x = -3, x = -2$.

We splitsen dit op, we krijgen:

$$\frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

$$\frac{A.(x+3) + B.(x+2)}{(x+2).(x+3)}$$

$$\frac{Ax + 3A + Bx + 2B}{(x+2).(x+3)} = \frac{1}{x^2+5x+6}$$

$$\begin{cases} Ax + Bx = 0x \\ 3A + 2B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + 2B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -B \\ -B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{(x+2)}dx + \int \frac{-1}{(x+3)}dx$$

$u = x + 2$ $\quad\quad$ $z = x + 3$

$du = dx$ $\quad\quad$ $dz = dx$

$$\int \frac{1}{u}du - \int \frac{1}{z}dz$$

$ln|u| - ln|z| + C$

$ln|x + 2| - ln|x + 3| + C$