Verbetering Toets Asymptoten:

Bereken indien mogelijk de verticale, horizontale en schuine asymptoten:

1. $\frac{5x+4}{x^2-2x}$

Voor de verticale asymptoot berekenen we de nulpunten van de noemer.

$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x.(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ v $x = 2$

Deze nulpunten komen niet voor in de teller (anders zou het een doorboring kunnen zijn).

VA: $x = 0$ en $x = 2$

De horizontale asymptoot: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x+4}{x^2-2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(5+\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}\left(5+\frac{4}{x}\right)}{x^{\cancel{2}}\left(1-\frac{2}{x}\right)}$$

We halen bij teller en noemer de hoogste graad eruit.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} . \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5+\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 0.5 = 0 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x} = 0$$

Dus HA: $y = 0$

Als er HA is, kan er geen SA zijn. Dus SA = /

2. $\mathbf{\frac{2}{4x-12}}$

Voor de verticale asymptoot berekenen we de nulpunten van de noemer. $4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Deze nulpunten komen niet voor in de teller (anders zou het een doorboring kunnen zijn).

VA: $x = 3$

De horizontale asymptoot: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{4x - 12} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1(2)}{x\left(4 - \frac{12}{x}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1(2)}{x\left(4 - \frac{12}{x}\right)}$$

We halen bij teller en noemer de hoogste graad eruit.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} . \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{4 - \frac{12}{x}} = 0 . \frac{2}{4} = 0 \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a}{x} = 0$$

Dus HA: $y = 0$

Als er HA is, kan er geen SA zijn. Dus SA = /

3. $\mathbf{\dfrac{6x^2-6}{2x^2-24x}}$

Voor de verticale asymptoot berekenen we de nulpunten van de noemer. $2x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x.(2x-24) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ v $x = 12$

Deze nulpunten komen niet voor in de teller (anders zou het een doorboring kunnen zijn).

VA: $x = 0$ v $x = 12$

De horizontale asymptoot: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x^2 - 6}{2x^2 - 24x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(6 - \frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(2 - \frac{24}{x}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(6 - \frac{6}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 - \frac{24}{x}\right)}$$

We halen bij teller en noemer de hoogste graad eruit.

$$\lim_{x \to \pm\infty} 1\,.\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(6 - \frac{6}{x^2}\right)}{\left(2 - \frac{24}{x}\right)} = 1.\frac{6}{2} = 3 \qquad\qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a}{x} = 0$$

Dus HA: $y = 3$

Als er HA is, kan er geen SA zijn. Dus SA = /

4. $\mathbf{\frac{2x+8}{4x-12}}$

Voor de verticale asymptoot berekenen we de nulpunten van de noemer. $4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Deze nulpunten komen niet voor in de teller (anders zou het een doorboring kunnen zijn).

VA: $x = 3$

De horizontale asymptoot: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+8}{4x-12} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(2+\frac{8}{x}\right)}{x\left(4-\frac{12}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}\left(2+\frac{8}{x}\right)}{\cancel{x}\left(4-\frac{12}{x}\right)}$$

We halen bij teller en noemer de hoogste graad eruit.

$$\lim_{x\to\pm\infty} 1\,.\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(2+\frac{8}{x}\right)}{\left(4-\frac{12}{x}\right)} = 1.\frac{2}{4} = 0{,}5 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x} = 0$$

Dus HA: $y = \frac{1}{2}$

Als er HA is, kan er geen SA zijn. Dus SA = /

5. $\frac{x^2-9}{8x-12}$

Voor de verticale asymptoot berekenen we de nulpunten van de noemer. $8x-12=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$

Deze nulpunten komen niet voor in de teller (anders zou het een doorboring kunnen zijn).

VA: $x=\frac{4}{3}$

De horizontale asymptoot: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-9}{8x-12}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}{x\left(8-\frac{12}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{\cancel{2}}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}{\cancel{x}\left(8-\frac{12}{x}\right)}$$

We halen bij teller en noemer de hoogste graad eruit.

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\,.\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}{\left(8-\frac{12}{x}\right)}=\pm\infty.\frac{1}{8}=\pm\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a}{x}=0$$

Dus geen HA

SA: $a=\frac{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2-9}{8x-12}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-9}{8x^2-12x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}{\cancel{x}^2.\left(8-\frac{12}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} 1\,.\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}{\left(8-\frac{12}{x}\right)}=1.\frac{1}{8}=\frac{1}{8}=a$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-9}{8x-12} - \frac{1}{8}x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-9-(8x-12).\frac{1}{8}x}{8x-12}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-9-x^2+\frac{4}{3}x}{8x-12}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4}{3}x-9}{8x-12} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}.\left(\frac{4}{3}-\frac{9}{x}\right)}{\cancel{x}.\left(8-\frac{12}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} 1. \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\frac{4}{3}-\frac{9}{x}\right)}{\left(8-\frac{12}{x}\right)} = 1.\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

SA: $\frac{1}{8}x + \frac{1}{6}$

6. $\frac{5x^3-15x}{2x^2-2x}$

Voor de verticale asymptoot berekenen we de nulpunten van de noemer.

$2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x.(2x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \text{ v } x = 1$

Deze nulpunten komen niet voor in de teller (anders zou het een doorboring kunnen zijn).

VA: $x = 0 \text{ v } x = 1$

De horizontale asymptoot: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^3-15x}{2x^2-2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(5-\frac{15}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{\cancel{3}}\left(5-\frac{15}{x^2}\right)}{\cancel{x}^2\left(2-\frac{2}{x}\right)}$$

We halen bij teller en noemer de hoogste graad eruit.

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\,.\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(5-\frac{15}{x^2}\right)}{\left(2-\frac{2}{x}\right)} = \pm\infty.\frac{5}{2} = \pm\infty \qquad\qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x} = 0$$

Dus geen HA

SA: $a = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{5x^3-15x}{2x^2-2x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^3-15x}{2x^3-2x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(5-\frac{15}{x^2}\right)}{\cancel{x}^3\left(2-\frac{2}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} 1\,.\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(5-\frac{15}{x^2}\right)}{\left(2-\frac{2}{x}\right)} = 1.\frac{5}{2} = \frac{5}{2} = a$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^3 - 15x}{2x^2 - 2x} - \frac{5}{2}x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^3 - 15x - (2x^2 - 2x).\frac{5}{2}x}{2x^2 - 2x}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^3 - 15x - 5x^3 + 2x^2}{2x^2 - 2x}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - 15x}{2x^2 - 2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}^2.\left(2 - \frac{15}{x}\right)}{\cancel{x}^2.\left(2 - \frac{2}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} 1. \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(2 - \frac{15}{x}\right)}{\left(2 - \frac{2}{x}\right)} = 1.\frac{2}{2} = 1$$

SA: $\frac{5}{2}x + 1$

7. $\frac{4x+1}{2x^2-2x}$

Voor de verticale asymptoot berekenen we de nulpunten van de noemer.

$2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x.(2x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \text{ v } x = 1$

Deze nulpunten komen niet voor in de teller (anders zou het een doorboring kunnen zijn).

VA: $x = 0 \text{ v } x = 1$

De horizontale asymptoot: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x+1}{2x^2-2x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(4-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(2-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(4-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}^2\left(2-\frac{2}{x}\right)}$$

We halen bij teller en noemer de hoogste graad eruit.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}.\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(4-\frac{1}{x}\right)}{\left(2-\frac{2}{x}\right)} = 0.\frac{4}{2} = 0 \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a}{x} = 0$$

HA: $y = 0$

HA dus geen SA

8. $\frac{5x^2-5x}{x^2-4x}$

Voor de verticale asymptoot berekenen we de nulpunten van de noemer.

$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x.(x-4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

Het nulpunt x = 0 komt voor in de teller, aangezien het evenveel keer voorkomt in de teller dan in de noemer(Beide 1 keer), is het een doorboring.

VA: $x = 4$

De horizontale asymptoot: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2-5x}{x^2-4x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(5-\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(5-\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{4}{x}\right)}$$

We halen bij teller en noemer de hoogste graad eruit.

$$\lim_{x\to\pm\infty} 1\,.\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(5-\frac{5}{x}\right)}{\left(1-\frac{5}{x}\right)} = 1.\frac{5}{1} = 5 \qquad\qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x} = 0$$

HA: $y = 5$

HA dus geen SA

9. $\frac{x-9}{2x+1}$

Voor de verticale asymptoot berekenen we de nulpunten van de noemer.

$2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

Dit nulpunt komt niet voor in de teller (anders zou het een doorboring kunnen zijn).

VA: $x=-\frac{1}{2}$

De horizontale asymptoot: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-9}{2x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(1-\frac{9}{x}\right)}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{9}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)}$$

We halen bij teller en noemer de hoogste graad eruit.

$$\lim_{x\to\pm\infty} 1\,.\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(1-\frac{9}{x}\right)}{\left(2+\frac{1}{x}\right)}=1.\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a}{x}=0$$

HA: $y=\frac{1}{2}$

HA dus geen SA

Facebook @Wiskunne
www.wiskunne.be
admin@wiskunne.be