Verbetering toets complexe getallen deel 5

1.Bereken de nulpunten in $\mathbb{C}$:

a) $\boldsymbol{z^2 + 4z + 5}$

$\omega^2 = b^2 - 4ac = 16 - 4.15 = -4$

$\omega = 2i$

$z_1 = \dfrac{-b+\omega}{2a}, z_2 = \dfrac{-b-\omega}{2a}$

$z_1 = \dfrac{-4+2i}{2}, z_2 = \dfrac{-4-2i}{2}$

$z_1 = -2+i, z_2 = -2-i$

b) $\boldsymbol{4z^2 + 4z + 5}$

$\omega^2 = b^2 - 4ac = 16 - 4.4.5 = -64$

$\omega = 8i$

$z_1 = \dfrac{-b+\omega}{2a}, z_2 = \dfrac{-b-\omega}{2a}$

$z_1 = \dfrac{-4+8i}{8}, z_2 = \dfrac{-4-8i}{8}$

$z_1 = -0.5+i, z_2 = -0.5-i$

c) $\boldsymbol{2z^3 - 4z^2 + z + 1}$

Derdegraadsvergelijking dus we gaan horner toepassen. De delers van 1 zijn {-1,1}

1 invullen levert: $2.1^3 - 4.1^2 + 1 + 1 = 0$

-1 invullen levert: $2.(-1)^3 - 4.(-1)^2 + 1 + 1 = -2 - 4 + 1 + 1 \neq 0$

	2	-4	1	1
1		2	-2	-1
	2	-2	-1	0

$(z-1).(2z^2-2z-1)$

We gaan nu de nulpunten zoeken van de tweedegraadsvergelijking.

$\omega^2 = b^2 - 4ac = 4 - 4.2.1 = -4$

$\omega = 2i$

$$z_2 = \frac{-b+\omega}{2a}, z_3 = \frac{-b-\omega}{2a}$$

$$z_2 = \frac{-2+2i}{4}, z_3 = \frac{-2-2i}{2}$$

$z_2 = -0.5 + 0.5i, z_3 = -0.5 - 0.5i$

En $z_1 = 1$ dit hadden we verkregen via horner.

d) $\boldsymbol{z^3 + 2z^2 - z - 2}$

Derdegraadsvergelijking dus we gaan horner toepassen. De delers van -2 zijn {-1,1,2,-2}

1 invullen levert: $1^3 + 2.1^2 - 1 - 2 = 0$

	1	2	-1	-2
1		1	3	2
	1	3	2	0

$(z-1).(z^2-3z+2)$

We gaan nu de nulpunten zoeken van de tweedegraadsvergelijking.

$\omega^2 = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$

$\omega = 1$

$z_2 = \dfrac{-b+\omega}{2a}, z_3 = \dfrac{-b-\omega}{2a}$

$z_2 = \dfrac{3+1}{2}, z_3 = \dfrac{3-1}{2}$

$z_2 = 2, z_3 = 1$

En $z_1 = 1$ dit hadden we verkregen via horner. We hebben dus een nulpunt dat twee keer wordt verkregen, dit is een nulpunt met multipliciteit 2.

e) $\mathbf{2z^3 + z^2 - 4z + 4}$

Derdegraadsvergelijking dus we gaan horner toepassen. De delers van 4 zijn {-1,1,2,-2,4,-4}. Je begint best altijd met de kleinste delers, deze zijn het makkelijkste om in te vullen en te berekenen.

-2 invullen levert: $2.(-2)^3 + (-2)^2 - 4.(-2) + 4 = 0$

	2	1	-4	4
-2		-4	6	-4
	2	-3	2	0

$(z+2).(2z^2 - 3z + 2)$

We gaan nu de nulpunten zoeken van de tweedegraadsvergelijking.

$\omega^2 = b^2 - 4ac = 9 - 4.2.2 = -7$

$\omega = \sqrt{7}i$

$z_2 = \dfrac{-b+\omega}{2a}, z_3 = \dfrac{-b-\omega}{2a}$

$z_2 = \dfrac{3+\sqrt{7}i}{4}, z_3 = \dfrac{3-\sqrt{7}i}{4}$

$z_2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{7}}{4}i\,, z_3 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{7}}{4}i$

En $z_1 = -2$ dit hadden we verkregen via horner.

f) $\mathbf{2z^2 + 3z + 5i}$

$\omega^2 = b^2 - 4ac = 9 - 4.2.5i = 9 - 40i$

We stellen $(x + yi) = \omega$ om de wortel van $9 - 40i$ te berekenen

$(x + yi)^2 = 9 - 40i$

$x^2 + 2xyi - y^2 = 9 - 40i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ 2xyi = -40i \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ xy = -20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\dfrac{20}{y})^2 - y^2 = 9 \\ x = -\dfrac{20}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{400}{y^2} - y^2 = 9 \\ x = -\dfrac{20}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{400}{y^2} - y^2 = 9 \\ x = -\dfrac{20}{y} \end{cases} \quad \mathit{Bovenste\ vergelijking, alles\ maal\ } y^2 \mathit{\ om\ de\ breuk\ weg\ te\ krijgen}$$

$$\begin{cases} 400 - y^4 = 9y^2 \\ x = -\dfrac{20}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y^4 - 9y^2 + 400 = 0 \\ x = -\dfrac{20}{y} \end{cases}$$

Een vierdegraadsvergelijking kunnen we niet oplossgen maar een tweedegraadsvergelijking wel dus we stellen $t = y^2$.

$$\begin{cases} -t^2 - 9t + 400 = 0 \\ x = -\dfrac{20}{y} \end{cases}$$

$D = b^2 - 4ac = 81 - 4.(-1).400 = 1681$

Via rekenmachine $\sqrt{D} = 41$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$t_1 = \frac{9 + 41}{2}, t_2 = \frac{9 - 41}{2}$$

$t_1 = 25, t_2 = -16$

$y^2 = 25, \cancel{y^2 = -16}\ x, y \in \mathbb{R}, (x + yi = z \in \mathbb{C})$

$y = 5\ of\ y = -5$

$$\begin{cases} y = 5\ of\ y = -5 \\ x = -\dfrac{20}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5\ of\ y = -5 \\ x = 4\ of\ x = -4 \end{cases}$$

$\omega = x + yi$

$\omega = 4 + 5i(de\ negatieve\ kant\ kunnen\ we\ ook\ nemen, we\ doen\ straks\ namelijk \pm \omega)$

De oorspronkelijke vergelijking is:

$2z^2 + 3z + 5i$

$\omega = 4 + 5i$

$$z_1 = \frac{-3 + 4 + 5i}{4}, z_2 = \frac{-3 - 4 - 5i}{4}$$

$$z_1 = \frac{1+5i}{4}, z_2 = \frac{-7-5i}{4}$$